สมการไดโอแฟนไทน์ $(p+1)^{2x}+5^y=z^2$

On the Diophantine Equation $(p+1)^{2x}+5^y=z^2$

นูรฟาดียา สะตือบา[1] เกียรติศักดิ์ รัตนสีหา[2] สุวิชา อิ่มนาง[3]
E-mail: suwicha.n@hotmail.com

บทคัดย่อ

ในงานวิจัยนี้ได้ให้ทฤษฎีบทและบทตั้งที่สำคัญเกี่ยวกับจำนวนเฉพาะแมร์แซน รวมถึงวิธีพิสูจน์ว่าสมการไดโอแฟนไทน์ $(p+1)^{2x}+5^y=z^2$ ไม่มีผลเฉลยของจำนวนเต็มที่เป็นลบ เมื่อ p เป็นจำนวนเฉพาะแมร์แซน

คำสำคัญ: สมการไดโอแฟนไทน์ จำนวนเฉพาะแมร์แซน จำนวนเฉพาะ

Abstract

In this paper, we propose the important theorem and lemma about a Mersenne prime number. We also prove that the Diophantine equation $(p+1)^{2x}+5^y=z^2$ has no non-negative integer solution where p is a Mersenne prime number

Keywords: Diophantine equation, Mersenne prime number, Prime number

ความนำ

วิธีการหาผลเฉลยของสมการไดโอแฟนไทน์เป็นหัวข้อที่สำคัญและได้ศึกษากันมาอย่างต่อเนื่อง แต่ยังไม่มีวิธีการที่สมบูรณ์แบบที่จะบอกว่าสมการไดโอแฟนไทน์ที่กำหนดให้มานั้นมีผลเฉลยหรือไม่ หรือถ้ามีผลเฉลยจะมีมากน้อยเพียงใด สมการไดโอแฟนไทน์ที่มีชื่อเสียงและรู้จักกันดีอยู่ในรูปแบบ

$$p^x+q^y=z^2$$

มีบทความวิจัยจำนวนมากได้พยายามหาเงื่อนไขเพื่อศึกษาผลเฉลยของสมการดังกล่าว เช่น ศึกษาภายใต้ภายสมบัติของจำนวนเฉพาะ จำนวนเฉพาะแมร์แซน หรือจัดรูปแบบของสมการใหม่ ดูรายละเอียดเพิ่มเติมได้จากเอกสาร [1, 2, 3, 4, 5]

การหาผลเฉลยของสมการไดโอแฟนไทน์เริ่มจากข้อคาดการณ์ของ Catalan [6] ในปี ค.ศ. 1844 ว่า $(a,b,x,y)=(3,2,2,3)$ เป็นผลเฉลยชุดเดียวของสมการไดโอแฟนไทน์ $a^x-b^y=1$ โดยที่ a,b,x และ y เป็นจำนวนเต็ม และ $min\{a,b,x,y\}>1$ ต่อมาในปี ค.ศ. 2004 Mihailescu [7] ได้ทำการพิสูจน์ข้อคาดการณ์ของ Catalan สำเร็จ ในปี ค.ศ. 2012 Suvarnamani [8] พบว่าสมการไดโอแฟนไทน์ $A^x+B^y=z^2$ มีผลเฉลยเป็นจำนวนเต็มที่ไม่เป็นลบและในปีเดียวกัน Tatong และ Suvarnamani [9] พบว่าสมการไดโอแฟนไทน์ $p^x+p^y=z^2$ มีผลเฉลยเป็นจำนวนเต็มที่ไม่เป็นลบ โดยที่ p เป็นจำนวนเฉพาะ

หลังจากนั้นในปี ค.ศ. 2013 Sroysang [10] ได้พิสูจน์เพิ่มเติมว่า $(0,1,3)$ เป็นผลเฉลยชุดเดียวของจำนวนเต็มที่ไม่เป็นลบของสมการไดโอแฟนไทน์ $7^x+8^y=z^2$

ในปี ค.ศ. 2014 Suvarnamani [11] ได้ค้นพบผลเฉลยของสมการไดโอแฟนไทน์ $p^x+q^y=z^2$ เมื่อ p เป็นจำนวนเฉพาะคี่โดยที่ $q-p=2$ และ x,y,z เป็นจำนวนเต็มที่ไม่เป็นลบ ต่อมาในปี ค.ศ. 2015 Tatong และ Suvarnamani [12] ได้ศึกษาสมการไดโอแฟนไทน์ $(p+1)^{2x}+q^y=z^2$ เมื่อ p เป็นจำนวนเฉพาะแมร์แซนโดยที่ $q-p=2$ และ x,y,z เป็นจำนวนเต็มที่ไม่เป็นลบ โดยพบว่าสมการไดโอแฟนไทน์ $(p+1)^{2x}+q^y=z^2$ ไม่มีผลเฉลยของจำนวนเต็มที่ไม่เป็นลบ และในการพิสูจน์ข้อเท็จจริงดังกล่าวจำเป็นต้องอาศัยบทตั้ง ดังนี้

บทตั้ง [12] ถ้า q เป็นจำนวนเฉพาะคี่ และ y,z เป็นจำนวนเต็มที่ไม่เป็นลบ แล้วสมการไดโอแฟนไทน์ $1+q^y=z^2$ ไม่มีผลเฉลยของจำนวนเต็มที่ไม่เป็นลบ

แต่ในบทตั้งดังกล่าวยังมีข้อบกพร่องโดยสังเกตว่าถ้าแทน $y=1, z=2$ และ $q=3$ จะได้ว่า (y,z,q) เป็นผลเฉลยของ $1+q^y=z^2$ นั่นหมายความว่ากรณี q เป็นจำนวนเฉพาะคี่ใดๆ บทตั้งดังกล่าวไม่จริงดังนั้นจึงเป็นที่สงสัยกันว่ากรณี $q=5$ สมการไดโอแฟนไทน์ $(p+1)^{2x}+5^y=z^2$ จะมีผลเฉลยหรือไม่จึงเป็นที่มาของบทความวิจัยชิ้นนี้ที่จะศึกษาให้แน่ชัด

[1] นักศึกษาหลักสูตรคณิตศาสตร์ สาขาวิชาคณิตศาสตร์ คณะวิทยาศาสตร์ มหาวิทยาทักษิณ
[2] อาจารย์ประจำสาขาวิชาคณิตศาสตร์ คณะวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี มหาวิทยาลัยราชภัฏเลย
[3] อาจารย์ประจำสาขาวิชาคณิตศาสตร์ คณะครุศาสตร์ มหาวิทยาลัยราชภัฏเลย

ความรู้พื้นฐาน

ในเนื้อหานี้จะให้ความรู้พื้นฐานที่จำเป็นสำหรับการพิสูจน์ทฤษฎีบทหลักโดยมีรายละเอียดดังนี้

1. **บทนิยาม 2.1** [13] ให้ p เป็นจำนวนเฉพาะ จะเรียก p ว่าจำนวนเฉพาะแมร์แซน ถ้า $p = 2^k - 1$ สำหรับบางจำนวนเฉพาะ k และจำนวนเฉพาะแมร์แซนบางจำนวน แสดงรายละเอียดดังตาราง

k	$p = 2^k - 1$	จำนวนเลขโดดของ p
2	3	1
3	7	1
5	31	2
7	127	3
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$

2. **ทฤษฎีบท 2.2** [13] **ทฤษฎีบทหลักมูลของเลขคณิต**

ให้ $n \in \mathbb{Z}$ และ $n > 1$ จะได้ว่า n สามารถเขียนได้ในรูป $n = p_1^{a_1} p_2^{a_2} p_3^{a_3} \ldots p_k^{a_k}$ โดยที่ $p_1, p_2, p_3, \ldots, p_k$ เป็นจำนวนเฉพาะซึ่ง $p_1 < p_2 < p_3 < \ldots < p_k$ และ $a_i \in \mathbb{N}$ สำหรับ $i = 1, 2, 3, \ldots, k$ และจะเขียน n ในรูปดังกล่าวได้เพียงแบบเดียวเท่านั้น

3. **ทฤษฎีบท 2.3** สำหรับ $a \in \mathbb{Z}^+$ และ p เป็นจำนวนเฉพาะ ถ้า $a \mid p^k$ แล้ว $a \in \{1, p, p^2, p^3, \ldots, p^k\}$

การพิสูจน์ กำหนดให้ $a \in \mathbb{Z}^+$ และ p เป็นจำนวนเฉพาะ และ $a \mid p^k$ โดยบทนิยามการหารลงตัว ได้ว่า จะมี $b \in \mathbb{Z}^+$ ที่ทำให้ $p^k = a \cdot b$ นั่นคือ $\underbrace{p \times p \times p \times p \times \ldots \times p}_{k-terms} = a \cdot b$ ดังนั้นจะมี $r, s \in \mathbb{Z}^+$ โดยที่ $r + s = k$ และ $p^r p^s = a \cdot b$ เป็นผลให้ $a = p^r$ หรือ $a = p^s$ ดังนั้น $a \in \{1, p, p^2, p^3, \ldots, p^k\}$ $\square$

4. **บทตั้ง 2.4** [10] $(a, b, x, y) = (3, 2, 2, 3)$ เป็นผลเฉลยชุดเดียวของสมการไดโอแฟนไทน์ $a^x - b^y = 1$ โดยที่ a, b, x, y เป็นจำนวนเต็ม และ $min\{a, b, x, y\} > 1$

เนื้อหา

ในการศึกษาทฤษฎีบทหลักจำเป็นต้องอาศัยบทตั้งที่สำคัญดังนี้

1. **บทตั้ง 3.1** ให้ p เป็นจำนวนเฉพาะแมร์แซน และ $q - p = 2$ จะได้ว่าสมการไดโอแฟนไทน์ $1 + q^y = z^2$ ไม่มีผลเฉลยของจำนวนเต็มที่ไม่เป็นลบ

การพิสูจน์ ให้ p เป็นจำนวนเฉพาะแมร์แซน และ $q - p = 2$ สมมติให้ y, z เป็นผลเฉลยที่ไม่เป็นลบของสมการ

$$1 + q^y = z^2 \qquad (1)$$

ในการพิสูจน์ได้แบ่งออกเป็น 3 กรณี คือ กรณี $y = 0$, $y = 1$ และ $y > 1$

<u>พิจารณา</u> **กรณี** $y = 0$

แทน $y = 0$ ในสมการ (1) จะได้ว่า $z^2 = 2$ ซึ่งเป็นไปไม่ได้ เพราะว่าไม่มีจำนวนเต็มใดๆที่ยกกำลังสองมีค่าเท่ากับ 2

กรณี $y = 1$

แทน $y = 1$ ในสมการ (1) จะได้ว่า $z^2 = q + 1 \qquad (2)$

และเนื่องจาก $q - p = 2$ จากสมการ (2) จะได้ว่า

$$z^2 = p + 3 \qquad (3)$$

และเนื่องจาก p เป็นจำนวนเฉพาะแมร์แซน นั่นคือ $p = 2^k - 1$ สำหรับบางจำนวนเฉพาะ k จากสมการ (3) แทน $p = 2^k - 1$ จะได้ว่า $z^2 = 2^k + 2$ นั่นคือ

$$z^2 = 2(2^{k-1} + 1) \qquad (4)$$

จากสมการ (4) จะได้ว่า $(2^{k-1}+1)$ เป็นจำนวนคี่ และ 2 เป็นจำนวนคู่ ทำให้ได้ว่า z^2 เป็นจำนวนคู่ ดังนั้น z เป็นจำนวนคู่ นั่นคือ $z = 2m; m \geq 0$ เพราะฉะนั้น $z^2 = 4m^2$ จากสมการ (4) จะได้ว่า $4m^2 = 2(2^{k-1}+1)$ นั่นคือ $2m^2 = 2^{k-1}+1$ (5)

จากสมการที่ (5) จะเห็นว่าเป็นไปไม่ได้ เนื่องจาก $2m^2$ เป็นจำนวนเต็มคู่ ในขณะที่ $2^{k-1}+1$ เป็นจำนวนเต็มคี่

กรณี $y > 1$

แทน $y > 1$ ในสมการ (1) จะได้ว่า $z^2 = q^y + 1 > q + 1$

และเนื่องจาก $q - p = 2$ ดังนั้น $q \geq 5$ เป็นผลให้ $z^2 > 6$ ดังนั้น $z > 2$

เนื่องจาก $q \geq 5, y > 1$ และ $z > 2$ ดังนั้น $min\{q, y, z\} > 1$

และเนื่องจาก $z^2 - q^y = 1$ โดยบทตั้ง 2.4 จะได้ $z = 3, q = 2$ และ $y = 3$

ขัดแย้งกับ $q \geq 5$ เพราะฉะนั้น ถ้าให้ p เป็นจำนวนเฉพาะแมร์แซน และ $q - p = 2$ จะได้ว่าสมการไดโอแฟนไทน์ $1 + q^y = z^2$ ไม่มีผลเฉลยของจำนวนเต็มที่ไม่เป็นลบ ∎

2. **บทตั้ง 3.2** ให้ p เป็นจำนวนเฉพาะแมร์แซน จะได้ว่า

$(p+1)^{2x} + 1 = z^2$ ไม่มีผลเฉลยของจำนวนเต็มที่ไม่เป็นลบ

การพิสูจน์ ให้ p เป็นจำนวนเฉพาะแมร์แซน สมมติให้ x, z เป็นผลเฉลยที่ไม่เป็นลบของสมการ

$$(p+1)^{2x} + 1 = z^2 \qquad (6)$$

ในการพิสูจน์ได้แบ่งออกเป็น 3 กรณี คือ กรณี $x = 0$, $x = 1$ และ $x > 1$

<u>**พิจารณา**</u>

กรณี $x = 0$

แทน $x = 0$ ในสมการ (6) จะได้ว่า $z^2 = 2$ ซึ่งเป็นไปไม่ได้ เพราะว่าไม่มีจำนวนเต็มใดๆที่ยกกำลังสองมีค่าเท่ากับ 2

กรณี $x = 1$

แทน $x = 1$ ในสมการ (6) จะได้ว่า

$\Rightarrow (p+1)^2 + 1 = z^2$

$\Rightarrow z^2 - (p+1)^2 = 1$

$\Rightarrow [z - (p+1)][z + (p+1)] = 1$ (7)

จากสมการ (7) แบ่งการพิจารณาเป็น 2 กรณี คือ

1) กรณี $z - (p+1) = 1$ และ $z + (p+1) = 1$

เนื่องจาก $z - (p+1) = 1$ จะได้ว่า

$z - p = 2$ (8)

และจาก $z + (p+1) = 1$ จะได้ว่า

$z + p = 0$ (9)

นำสมการ (8) + (9) จะได้ว่า $2z = 2$ นั่นคือ $z = 1$

แทน $z = 1$ ในสมการ (8) จะได้ว่า $p = -1$ ซึ่งขัดแย้งกับ p เป็นจำนวนเฉพาะแมร์แซน

2) กรณี $z - (p+1) = -1$ และ $z + (p+1) = -1$

เนื่องจาก $z - (p+1) = -1$ จะได้ว่า

$z - p = 0$ (10)

และจาก $z + (p+1) = -1$ จะได้ว่า

$z + p = -2$ (11)

นำสมการ (10) + (11) จะได้ว่า $2z = -2$ นั่นคือ $z = -1$

ซึ่งขัดแย้งกับ z เป็นจำนวนเต็มที่ไม่เป็นลบ

กรณี $x > 1$

แทน $x > 1$ ในสมการ (6) จะได้ว่า $z^2 = (p+1)^{2x} + 1 > (p+1)^2 + 1$

เนื่องจาก p เป็นจำนวนเฉพาะแมร์แซน ดังนั้น $p \geq 3$

เป็นผลให้ $z^2 > 17$ ดังนั้น $z > 4$

เนื่องจาก $p \geq 3, x > 1$ และ $z > 4$ ดังนั้น $min\{p, x, z\} > 1$

และเนื่องจาก $z^2 - (p+1)^{2x} = 1$ โดยบทตั้ง 2.4 จะได้ $z = 3, p + 1 = 2$

ดังนั้น $p = 1$ ขัดแย้งกับ p เป็นจำนวนเฉพาะแมร์แซน

เพราะฉะนั้น ถ้าให้ p เป็นจำนวนเฉพาะแมร์แซน จะได้ว่าสมการไดโอแฟนไทน์ $(p+1)^{2x} + 1 = z^2$ ไม่มีผลเฉลยของจำนวนเต็มที่ไม่เป็นลบ $\blacksquare$

3. **ทฤษฎีบทหลัก 3.3** สมการไดโอแฟนไทน์ $(p+1)^{2x} + 5^y = z^2$ ไม่มีผลเฉลยของจำนวนเต็มที่ไม่เป็นลบ เมื่อ p เป็นจำนวนเฉพาะแมร์แซน

การพิสูจน์ ให้ p เป็นจำนวนเฉพาะแมร์แซน สมมติให้ x, y, z เป็นผลเฉลยที่ไม่เป็นลบของสมการ

$$(p+1)^{2x} + 5^y = z^2 \qquad (12)$$

ในการพิสูจน์ได้แบ่งออกเป็น 2 กรณี คือ กรณี $x = 0$ และ $x \geq 1$

<u>**พิจารณา**</u>

กรณี $x = 0$

แทน $x = 0$ ในสมการ (12) จะได้ว่า $1 + 5^y = z^2$

โดยบทตั้ง 3.1 จะได้ว่าสมการนี้ไม่มีผลเฉลยของจำนวนเต็มที่ไม่เป็นลบ

กรณี $x \geq 1$ ในการพิสูจน์ได้แบ่งออกเป็น 2 กรณี คือ กรณี $y = 0$ และ $y \geq 1$

<u>**พิจารณา**</u>

กรณี $y = 0$

แทน $y = 0$ ในสมการ (12) จะได้ว่า $(p+1)^{2x} + 1 = z^2$

โดยบทตั้ง 3.2 จะได้ว่าสมการนี้ไม่มีผลเฉลยของจำนวนเต็มที่ไม่เป็นลบ

กรณี $y \geq 1$

จากสมการ (12) จะได้ว่า

$$5^y = z^2 - (p+1)^{2x}$$
$$= [z - (p+1)^x][z + (p+1)^x]$$

จากทฤษฎีบท 2.2 จะได้ว่า

$$z - (p+1)^x = 5^u \qquad (13)$$

และ $z + (p+1)^x = 5^{y-u}$ เมื่อ $y > u$ และ $u \in \mathbf{Z}^+ \cup \{0\}$ (14)

นำสมการ (13) - (14) จะได้

$$5^{y-u} - 5^u = 2(p+1)^x$$
$$\Rightarrow \quad 5^u(5^{y-2u} - 1) = 2(p+1)^x \qquad (15)$$

เนื่องจาก p เป็นจำนวนเฉพาะแมร์แซน ดังนั้น $p = 2^k - 1$ สำหรับบางจำนวนเฉพาะ k จากสมการ (15) แทน $p = 2^k - 1$ จะได้ว่า

$$5^u(5^{y-2u} - 1) = 2(2^k - 1 + 1)^x = 2(2^k)^x = 2^{kx+1} \qquad (16)$$

จากสมการ (16) จะได้ว่า $5^u \mid 2^{kx+1}$

และจากทฤษฎีบท 2.3 จะได้ว่า $5^u \in \{1, 2^1, 2^2, \ldots, 2^{kx+1}\}$ นั่นคือ $5^u = 1$

ดังนั้น $u = 0$ และจากสมการ (16) แทน $u = 0$ จะได้ว่า

$5^y - 1 = 2^{kx+1}$ (17)

จากสมการ (17) จะได้ว่า

$5^y - 2^{kx+1} = 1$ (18)

และจากสมการ (18) แบ่งการพิจารณาเป็น 2 กรณี คือ กรณี $y = 1$ และ $y > 1$

<u>พิจารณา</u>

กรณี $y = 1$

แทน $y = 1$ ในสมการ (18) จะได้ว่า $5 - 2^{kx+1} = 1$

ดังนั้น $2^{kx+1} = 4$ เป็นไปไม่ได้ เพราะว่า k เป็นจำนวนเฉพาะ

กรณี $y > 1$

จากสมการ (18) เนื่องจาก $y > 1$ และ $kx + 1 \geq 3$ ดังนั้น $min\{y, kx+1\} > 1$ โดยบทตั้ง 2.4 และจากสมการ (18) จะได้ว่า $5 = 3$ ซึ่งเป็นไปไม่ได้

เพราะฉะนั้น สมการไดโอแฟนไทน์ $(p+1)^{2x} + 5^y = z^2$ ไม่มีผลเฉลยของจำนวนเต็มที่ไม่เป็นลบ เมื่อ p เป็นจำนวนเฉพาะแมร์แซน W

บทสรุป

ในงานวิจัยนี้ได้ให้บทตั้งที่สำคัญเกี่ยวกับจำนวนเฉพาะแมร์แซน รวมทั้งพิสูจน์ว่าสมการไดโอแฟนไทน์ $(p+1)^{2x} + 5^y = z^2$ ไม่มีผลเฉลยของจำนวนเต็มที่ไม่เป็น

กิตติกรรมประกาศ (optional)

ผู้แต่งขอขอบคุณผู้ทรงคุณวุฒิทุกท่านที่ได้ให้ข้อคิดเห็นและข้อเสนอแนะต่าง ๆ เพื่อปรับปรุงบทความวิจัยนี้

เอกสารอ้างอิง

[1] N. Burshtein (2018), **On solutions to the Diophantine equation** $p^2 + q^2 = z^4$, Annals of Pure and Applied Mathematics, 12(2) 135-138.

[2] M. Alan (2020), **On the exponential diophantine equation** $(m^2 + m + 1)^x + m^y = (m+1)^z$, Mediterr. J. Math., 189(17) 1-8.

[3] M. Alan and U. Zengin (2020), **On the Diophantine equation** $x^2 + 3^a 41^b = y^n$, Periodical Mathematical Hungarica, (81) 284-291.

[4] N. Ghanmi (2020), **On the Diophantine equation** $Cx^2 + D = 2y^q$, The Ramanujan Journal, (53) 389-397.

[5] S. Li (2020), **On a Diophantine equality involving prime numbers**, The Ramanujan Journal, (52) 163-174.

[6] E.Catalan (1844), **Note extraite dune letter addressee a lediteur**, J.Reine Angew. Math., 27(192) 192-192.

[7] P. Mihailescu (2004), **Primary cyclotomic units and a proof of Catalan's conjec-ture**, J. Reine Angew. Math., (27) 167-195.

[8] A. Suvarnamani (2012), **On the Diophantine equation of form** $A^x + B^y = C^z$,Poceeding of RCAEM-II 2012, 30-31.

[9] M. Tatong and A. Suvarnamani (2012), **On the Diophantine equation** $p^x + p^y = z^z$, 15th International Conference of International Academy of Physical Sciences, 9 - 13.

[10] B.Sroysang (2013), **On the Diophantine equation** $7^x + 8^y = z^2$, Int. J. Pure Applied Math., (84) 111-114.

[11] A. Suvarnamani (2014), **Solution of the Diophantine equation** $p^x + q^y = z^z$, Int. J. of Pure and Applied Math., (94) 457-460.

[12] M. Tatong and A. Suvarnamani (2015), **On the Diophantine equation** $(p+1)^{2x} + q^y = z^2$, Int. J. Pure Applied Math., (103) 457-460.